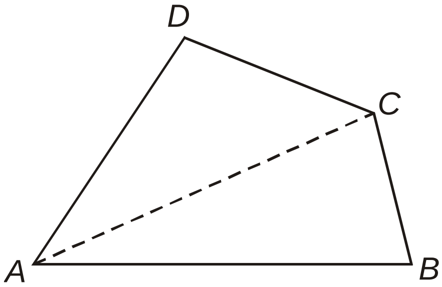
3.4.9 Konstrukce čtyřúhelníků

Předpoklady: 030408

Trojúhelníky byly určeny třemi prvky.

Př. 1: Obecný čtyřúhelník je dán délkami všech svých čtyř stran. Rozhodni, zda je určen nebo ne.

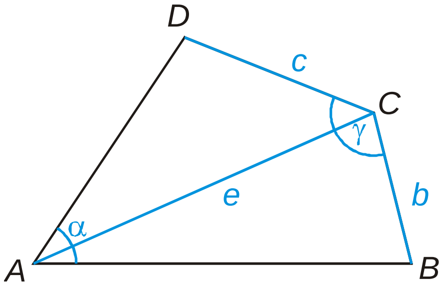
Nejjednodušší je vzít čtyři různě dlouhé tužky a zkusit takový čtyřúhelník sestavit. Ihned zjistíme, že možností je nekonečně mnoho.



Z obrázku vidíme, že úhlopříčka AC nám čtyřúhelník rozdělí na dva trojúhelníky. U každého však známe pouze dva prvky (dvě strany) $\Rightarrow$ trojúhelníky nejsou zcela určeny. U prvního můžeme zvolit délku strany AC a druhý je již určen $\Rightarrow$ obecný čtyřúhelník je zřejmě určen pěti prvky.

Př. 2: Sestroj všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$, je-li dáno: $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 80°$, $|\sphericalangle BCD| = 100°$.

Náčrtek:



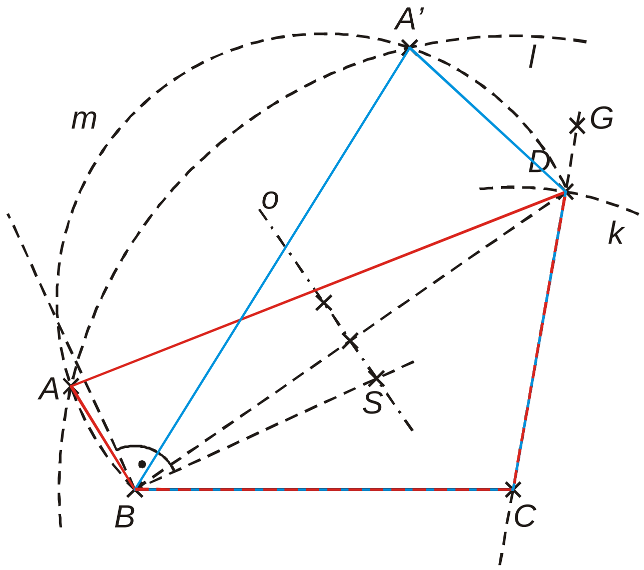
Úloha je nepolohová.

Řešení: Ze zadaných údajů můžeme ihned sestrojit trojúhelník BCD. Bod A leží ve vzdálenosti $|AC| = 6\,\text{cm}$ od bodu C na množině bodů, ze které je úsečka BD vidět pod úhlem $|\sphericalangle DAB| = 80°$.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:

1. $BC; |BC| = 5\,\text{cm}$
2. $CG; |\sphericalangle BCG| = 100°$
3. $k; k(C; |CD| = 4\,\text{cm})$
4. $D; D = \leftrightarrow CG \cap k$



$5. l; l(C; |AC| = 6\,\text{cm})$

$6. m; m = \{X \in \mapsto BDG; |\sphericalangle BXD| = 80°\}$

$7. A, A'; A \cup A' = l \cap m$

$8. ABCD, A'BCD$

Rozbor: Příklad má 0 až 2 řešení podle počtu průsečíků kružnice *l* s obloukem *m*.

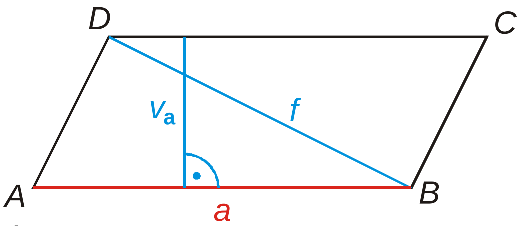
Př. 3: Zopakuj vlastnosti speciálních čtyřúhelníků. Kolik prvků musíme znát při jejich konstrukci?

Čtverec: Všechny strany shodné, všechny vnitřní úhly shodné rovné $90°$, protější strany rovnoběžné, úhlopříčky se půlí, úhlopříčky jsou navzájem kolmé $\Rightarrow$ potřebujeme znát jednu velikost.
Kosočtverec: Všechny strany shodné, protější strany rovnoběžné, úhlopříčky se půlí, úhlopříčky jsou navzájem kolmé $\Rightarrow$ musíme znát dva prvky, alespoň jednu velikost.
Obdélník: Protější strany shodné, všechny vnitřní úhly shodné rovné $90°$, protější strany rovnoběžné, úhlopříčky se půlí $\Rightarrow$ potřebujeme znát dva prvky, alespoň jednu velikost.
Rovnoběžník: Protější strany shodné, protější vnitřní úhly shodné, protější strany rovnoběžné, úhlopříčky se půlí $\Rightarrow$ potřebujeme znát tři prvky, alespoň jednu velikost.
Lichoběžník: Dvě protější strany jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ potřebujeme znát čtyři prvky, alespoň jednu velikost.
Tětivový čtyřúhelník: Má kružnici opsanou $\Rightarrow$ potřebujeme znát čtyři prvky, alespoň jednu velikost.
Tečnový čtyřúhelník: Má kružnici vepsanou $\Rightarrow$ potřebujeme znát čtyři prvky, alespoň jednu velikost.

Pedagogická poznámka: K počtu potřebných prvků vedou dvě cesty. Od pěti prvků pro obecný čtyřúhelník odečteme prvky, které jsou stejné kvůli speciální vlastnosti. Zkusíme si představit konstrukci daného čtyřúhelníku v nejjednodušším případě.

Př. 4: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = 3\,\text{cm}$. Sestroj všechny rovnoběžníky *ABCD*, pro které platí $f = |BD| = 5{,}5\,\text{cm}$, $v_a = 4\,\text{cm}$.

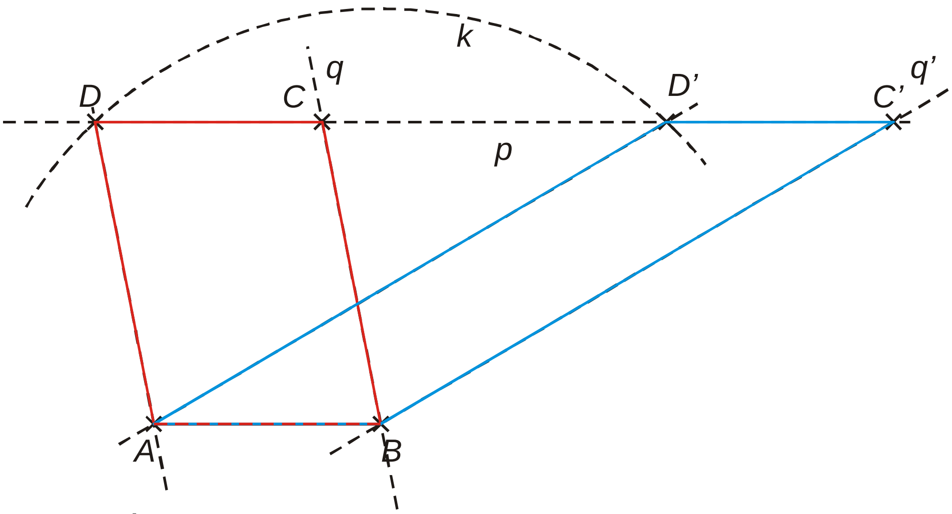
Náčrtek:



Úloha je polohová.

Řešení: Bod D leží na kružnici $k\left(B, f=|BD|=6\,\text{cm}\right)$ a rovnoběžce s přímkou AB ve vzdálenosti $v_a = 4\,\text{cm}$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

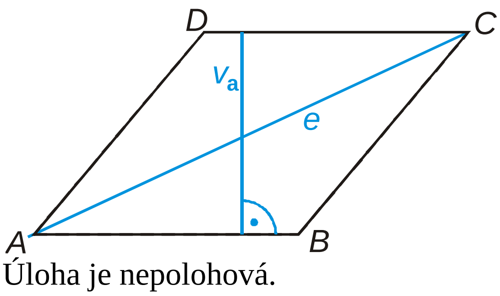
1. $AB; |AB| = 3\,\text{cm}$
2. $p;\ p \parallel AB, |pAB| = v_a = 4\,\text{cm}$
3. $k; k\left(B;\ f = 5{,}5\,\text{cm}\right)$
4. $D, D'; D \cup D' = p \cap k$
5. $q; q \parallel AD, B \in q$
6. $C; C = p \cap q$
7. $q'; q' \parallel AD', B \in q'$
8. $C'; C' = p \cap q'$
9. $ABCD, ABC'D'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině nula nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice k a přímky p.

Pedagogická poznámka: Nalézt řešení nedělá žákům problém. Část z nich však zapomene na druhé řešení.

Př. 5: Sestroj všechny kosočtverce $ABCD$ je-li dáno: $v_a = 4\,\text{cm}$, $e = 5\,\text{cm}$.

Náčrtek:



Úloha je nepolohová.

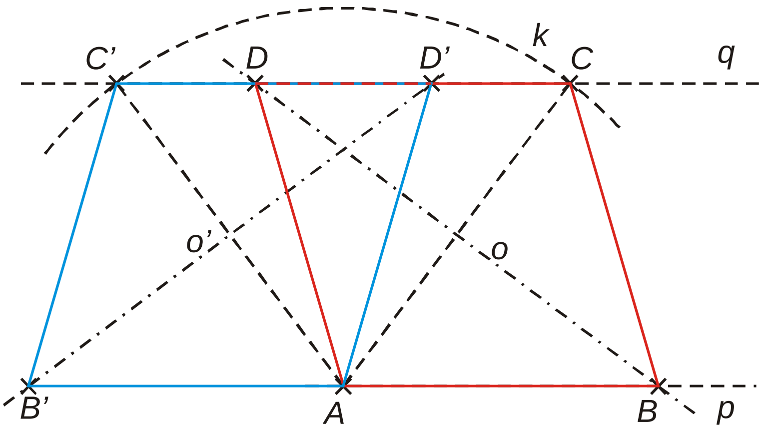
Problém: Když nakreslíme nejdříve úsečku AC, nemůžeme snadno využít znalost výšky v_a.

Řešení: Nejdříve narýsujeme dvě rovnoběžné přímky. Na jedné zvolíme vrchol A a pomocí kružnice o poloměru e najdeme vrchol C. Zbývající vrcholy kosočtverce leží na ose úsečky AC (úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé, strany jsou shodné).

Konstrukce:

Zápis konstrukce:

1. $p, q;\ p \parallel q, |pq| = v_a = 4\,\text{cm}$
2. $A; A \in p$



$3. k; k(A; e = 5\,\text{cm})$
$4. C, C'; C \cup C' = q \cap k$
$5. o; o_{AC}$
$6. B; B = o \cap p$
$7. D; D = o \cap q$
$8. ABCD$

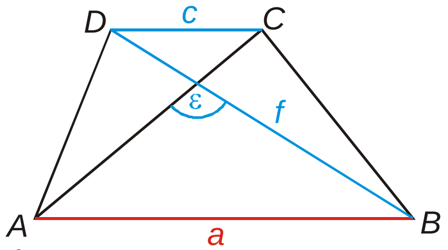
Rozbor: Příklad má žádné nebo jedno řešení (kosočtverce *ABCD* a $AB'C'D'$ jsou osově souměrné podle kolmice na přímku *p* jdoucí bodem *A*).

Pedagogická poznámka: Příklad je nezvyklý tím, že se začíná "jakoby bez bodů" i možnost volby vrcholu *A* na přímce *p* příklad někomu komplikuje.

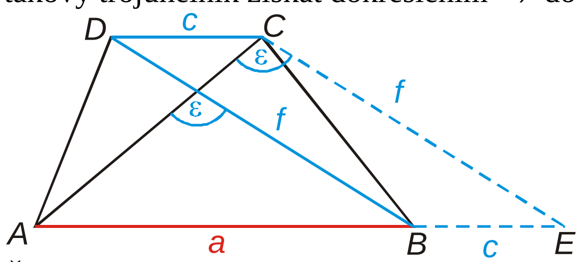
Pedagogická poznámka: Lepším žákům je možné zadat předchozí příklad jako polohovou úlohu s danou úsečkou *AC* (řešením je nakreslit trojúhelník ACC_0, kde C_0 je pata výšky vedené z vrcholu *C*).

Př. 6: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = 4\,\text{cm}$. Sestroj všechny lichoběžníky *ABCD* (se základnou *AB*), je-li dáno: $|CD| = 3\,\text{cm}$, $|BD| = 5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ASB| = 100°$ (bod *S* je průsečíkem úhlopříček).

Náčrtek:



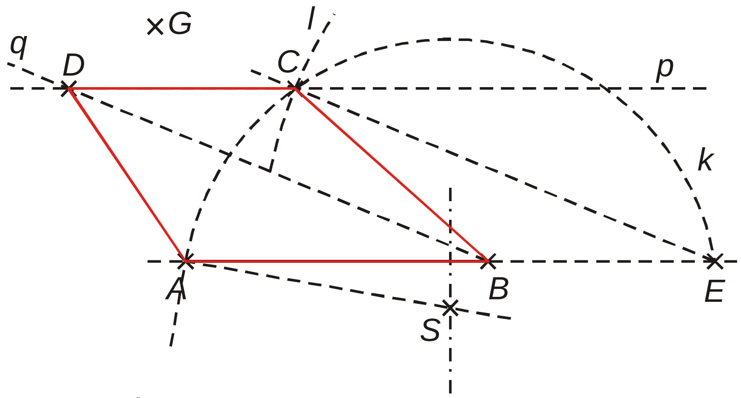
Úloha je polohová.
Problém: Neznáme žádný trojúhelník, který bychom mohli začít sestrojovat $\Rightarrow$ zkusíme takový trojúhelník získat dokreslením $\Rightarrow$ do bodu *C* posuneme úhlopříčku *f*.



Řešení: Sestrojíme trojúhelník *AEC*, bod *D* najedeme pomocí rovnoběžky se stranou *CE* bodem *B*.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:
$1. AB; |AB| = 4\,\text{cm}$
$2. E; E \in \mapsto AB, |BE| = c = 3\,\text{cm}$



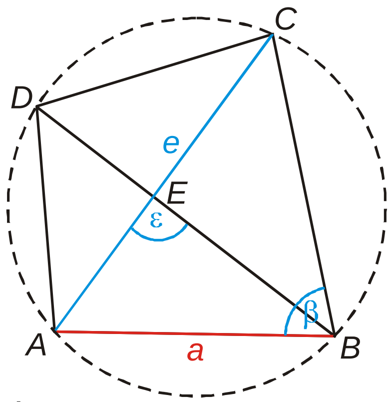
3. $k; k = \{X \in \mapsto ABG; |\sphericalangle AXE| = 100°\}$
4. $l; l(E; f = |BD| = 5\,\text{cm})$
5. $C; C = k \cap l$
6. $p; p \parallel AB, C \in p$
7. $q; q \parallel CE, B \in q$
8. $D; D = p \cap q$
9. $ABCD$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině nula nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice *l* a oblouku *k*.

Pedagogická poznámka: Některé žáky překvapí, že výsledný lichoběžník nemá tvar, který jsme používali v náčrtku a na který jsou zvyklí.

Př. 7: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = 4\,\text{cm}$. Sestroj všechny tětivové čtyřúhelníky *ABCD*, v nichž je $|AC| = e = 6\,\text{cm}$, $\beta = 120°$ a $\varepsilon = 105°$. ε je velikost $\sphericalangle AEB$, kde bod *E* je průsečík úhlopříček.

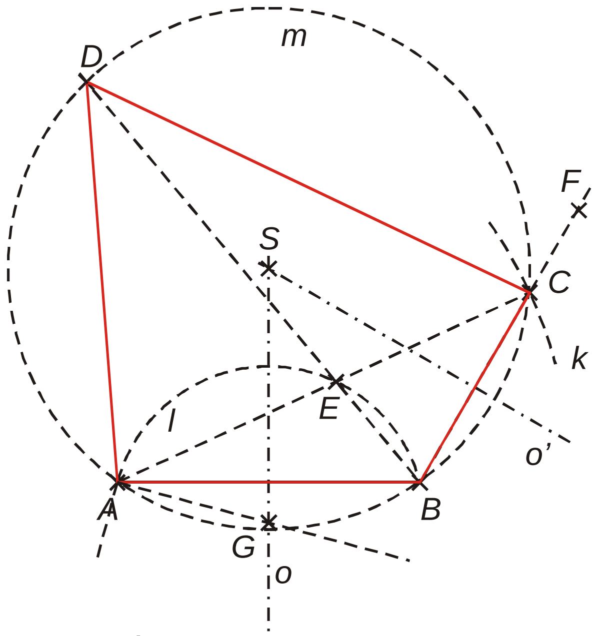
Náčrtek:



Úloha je polohová.
Řešení: Sestrojíme trojúhelník *ABC*. Kružnice opsaná tomuto trojúhelníku je zároveň kružnicí opsanou hledanému čtyřúhelníku *ABCD*. Bod *D* najedeme jako průsečík polopřímky *BE* s kružnicí opsanou. Bod *E* leží na úsečce *AC* a úsečka *AB* je z něj vidět pod úhlem $\varepsilon = 105°$.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:
1. $AB; |AB| = 4\,\text{cm}$
2. $\mapsto BF; |\sphericalangle ABF| = 120°$
3. $k; k(A; e = |AC| = 6\,\text{cm})$
4. $C; C = k \cap \mapsto BF$
5. $o; o_{AB}$
6. $o'; o_{BC}$
7. $S; S = o \cap o'$
8. $m; m(S; |SA|)$



9. $l; l = \{X \in \mapsto ABC; |\sphericalangle AXB| = 105°\}$
10. $E; E = l \cap AC$
11. $\mapsto BE$
12. $D; D = \mapsto BE \cap m$
13. $ABCD$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině nula nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků a oblouku *l* a úsečky *AC*.

Př. 8: Petáková:
strana 78/cvičení 21 b)
strana 78/cvičení 22 a)
strana 78/cvičení 23 a) c)
strana 78/cvičení 24 a) d)

Shrnutí: I při konstrukci čtyřúhelníků většinou nejdříve sestrojujeme pomocný trojúhelník.